# Gauss 型確率場の変分(ガウス型確率場 : 確率変分解析及び関連する話題)



飛田, 武幸

数理解析研究所講究録
672巻 1988年 1-13



# Gauss型確率場の変分

名大理学部　飛田武幸 (Takeyuki HIDA)

## §1. 序

多次元パラメーターをもつGauss型確率場の研究には，種々な方法が試みられているが，ここでは次のような方法を提唱したい．

i) パラメーターを低次元のsub-manifoldに制限して得られる確率場，さらにそのような場の族を考える．特に曲線をとって考えたとき，通常のGauss過程が得られ，標準表現などの既存の研究方法を利用することができる．

ii) 上のようにして得られた確率場の族において，sub-manifoldを動かしてみるとき，従属性の変化において新たな視点を見出すことができる．このとき変分法の古典論が一つの研究手段を与えている．

iii) さらに与えられた確率場から線型演算によって，sub-manifoldをパラメーターとする場を構成し，ii)と同様な

アプローチを試みる。

上のような立場から，多次元パラメーターの Lévy の Brown 運動，Wiener 過程，Ornstein-Uhlenbeck 過程等の研究において興味ある事実が見出されており（本報告集の中の野田，Si Si の論文，及び文献［5］，［6］参照），今後の一般論の発展が期待される。

このような目標に対する我々の試みは，ホワイトノイズ解析の一環として位置づけることができる。具体的には次のような展開となる。

まず §2 で $R^d$-パラメーターのホワイトノイズを準備し，その線型汎関数として表される Gauss 型確率場を考察する。この場合，いわゆる $\mathcal{S}$-変換によって，ランダムな汎関数が $R^d$ 上の $C^\infty$-級の関数の汎関数に移されて，古典関数解析の適用を可能にしている。

いま，$\mathbb{C}=\{C$；単位円 $S^1$ と $C^\infty$-級微分同相な閉曲線$\}$ とし，$\mathbb{C}$ をパラメーターにもつ Gauss 型確率場 $X(C)$ を考える。曲線 $C$ が $\mathbb{C}$ 内を動いたときの $X(C)$ の変化，特にその従属性の推移に着目したい。一般論は困難で，特別な場合（例えば §4，2），また文献［5］など）に興味がある。

特に $\mathbb{C}$ の部分族 $\mathbb{S}=\{R^2$ 内の円周$\}$ をとって，$C$ が $\mathbb{S}$ 内を動くとしたときは，無限次元回転群のある部分群が有効に用いられて（§4，1)），$X(C)$ の変分 $\delta X(C)$ の具体的な形を与えることができる。このとき円周をパラメーター空間にもつ，*singularity* のある Gauss 型の確率変数系が出現する．そして既製の取扱い法では御しきれない興味深い対象となっている。

また §4，2) で示すように，Green 関数についての諸結果，特に変分，を用いて，Lévy の *infinitesimal equation* のアイディアの一端を確率場において見出すことができる．この観点は，今後の一般論に向けた，一つの礎石となると考えられ，大いに注目したい事実である。

## §2．ホワイトノイズと Gauss 型確率場

次のような Gel'fand triple から出発する：

$$E \subset L^2(R^d) \subset E^*.$$

ここで $E$ は適当な核型空間，$E^*$ は $E$ の共役空間である．$E$ と $E^*$ を結ぶ双一次形式は記号 $\langle\ ,\ \rangle$ で表す：$\langle x, \xi\rangle$，$x \in E^*$，$\xi \in E$．超関数の空間 $E^*$ 上の確率測度 $\mu$ で，その特性汎関数 $C(\xi)$，$\xi \in E$，が $\exp[-\frac{1}{2}\|\xi\|^2]$ であるものをホワイトノイズ

<u>測度</u>といい，測度空間 $(E^*, \mu)$ を<u>ホワイトノイズ</u>と呼ぶ．$R^d$ はそのパラメーター空間である．

$R^d$ 内で $S^{d-1}$ と $C^\infty$ 級微分同相な曲面 $C$ をとる．$C$ は良い解析的構造をもつので，それをパラメーター空間にもつホワイトノイズ測度 $\mu_C$ を定義することができる．これは $\mu$ の制限とも考えることができ，$C$ を種々に動かすとき consistent な測度の族 $\{\mu_C\}$ が与えられる．

もとのホワイトノイズに戻り，ヒルベルト空間 $(L^2) = L^2(E^*, \mu)$ を考えよう．$\xi$ を固定したとき $\langle x, \xi \rangle$ は $x$ の汎関数とみて $(L^2)$ の要素である．それはまた確率空間 $(E^*, \mu)$ 上の Gauss 型確率変数で，その分布は $N(0, \|\xi\|^2)$ である．そこで $\{\langle x, \xi\rangle ; \xi \in E\}$ の張る $(L^2)$ の部分空間 $\mathcal{H}_1$ を構成すると，$\mathcal{H}_1$ は Gaussian system である．

$(L^2)$ の要素 $\Phi(x)$ の <u>$\mathcal{S}$-変換</u>は次式で与えられる：

(2.1) $$(\mathcal{S}\Phi)(\xi) = \int \Phi(x+\xi)\, d\mu(x), \qquad \xi \in E.$$

$(\mathcal{S}\Phi)(\xi)$ を $U(\xi)$ とかき，$\Phi$ の <u>U-functional</u> と呼ぶ．この変換 $\mathcal{S}$ を $\mathcal{H}_1$ に制限したとき，U-functional は常に

(2.2) $$U(\xi) = \int_{R^d} F(u)\, \xi(u)\, du, \qquad F \in L^2(R^d),$$

と表すことができ，同型対応

(2.3) $$\mathcal{H}_1 \cong L^2(R^d) \quad \text{under } \mathcal{S}.$$

が証明される.

パラメーター空間をCにとって，確率測度 $\mu_C$ を考えても，同様にして，Gaussian system $\mathcal{H}_1(C)$ が得られ (2.2)に対応するU-functionalを用いた $\mathcal{H}_1(C)$ の元 $\Phi(C;x)$ の表現は

$$(2.4) \qquad U(C;\xi) = \int_C F(s)\xi(s)\,ds$$

と書くことができる．ここで $\xi(s)$ は $\xi(u)$ のCへの制限，$ds$ はC上の面積要素である．ここでCを動かしたとき，$\{\Phi(C;x)\}$ はCをパラメーターとするGauss型の確率場である．従ってその変分 $\delta\Phi(C;x)$ を見るのは自然であろう．$\Phi$ 自身はランダムな汎関数であり，直接 $\delta\Phi$ を扱うのには準備が必要である．しかし，実際は $S$-変換を用いて (2.4) の形の汎関数の変分を扱えばよい．ただし，Fが一般にはCに依存するので安易な計算とは限らないことを注意する．

## §3．関数解析よりの準備

1) 古典的変分の理論より，直接関係のある事実を列挙しておこう．

i) Lévyの関数解析より（[2] 参照，特に第I部）

$d=2$ のとき，$R^2$ の領域，或はその境界の汎関数が対象とな

る．典型的な例をあげよう．

a)．$G$ を領域 $(\subset R^2)$，その境界 $C=\partial G$ は十分滑らかなものとする．たとえば $C\in\mathbb{C}$ とする．

$$U(C)=\iint_G F(u,v)\,du\,dv$$

ならば

$$\text{(3.1)}\qquad \delta U=\int_C F(s)\,\delta n(s)\,ds,$$ $ds$ は $C$ 上の長さ．

b) $C$ は $S^1$ と微分同相で

$$U(C)=\int_C G(s)\,ds,$$ $G(s)$ は $G(u,v)\Big|_C$ を表す，

ならば

$$\text{(3.2)}\qquad \delta U(C)=\int_C\left(\frac{\partial G}{\partial n}-\kappa G\right)\delta n(s)\,ds,$$ $\kappa$：曲率．

ただし $\partial/\partial n$ は外向きの法線微分を表す．

c) $C$ は上と同じ，

$$U(C)=\int_C F(C;s)\,G(s)\,ds$$

ならば（[6] 参照）

$$\text{(3.3)}\qquad \delta U(C)=\int_C\{\delta F(C;s)-\kappa F(C;s)\,\delta n(s)\}G(s)\,ds+\int_C F(C;s)\frac{\partial}{\partial n}G(s)\,\delta n(s)\,ds.$$

ii) <u>Hadamard equation</u>. $C$は前出の$\mathbb{C}$を動くものとする．$C$に対する(ラプラシアンに関する)Green関数を$g(z,y;C)$とかく．$C$の微小変化によっておこる$g$の変分は，周知のように次式で与えられる．

$$(3.4)\quad \delta g(z,y;C) = -\frac{1}{2\pi}\int_{t\in C}\frac{\partial g(t,z;C)}{\partial n_t}\frac{\partial g(y,t;C)}{\partial n_t}\delta n(s_t)\,ds_t .$$

この公式の一般化には種々の試みがある．例えばラプラシアン$\Delta$の代りに$\Delta^2$をとった2次のGreen関数$G(z,y;C)$の場合は

$$(3.5)\quad \delta G(z,y;C) = \frac{1}{8\pi}\int_{t\in C}\Delta_t G(z,t;C)\,\Delta_t G(t,y;C)\,\delta n(s)\,ds, \quad (s=s_t).$$

となる，等が知られている．

2) 回転群 $O(E)$

出発点にとったGelfand tripleのメンバー$E$として

$$(3.6)\quad E = \left\{\xi\in C^\infty(R^d)\ ;\ (w\xi)(u) = \xi\!\left(\frac{u}{|u|^2}\right)\frac{1}{|u|^d}\in C^\infty(R^d)\right\}$$

を選ぶ．$E$の回転の全体$O(E)$は群をなす．これを$E$の回転群という．

任意の$g\in O(E)$に対して，その共役な変換$g^*$は$E^*$上に働き，$\mu$を不変にする：

$$(3.7)\quad g^*\cdot\mu = \mu .$$

この事実は，回転群がホワイトノイズ解析において重要な役割を果すであろうことを示唆している。実際それを実証する多くの結果が得られている．

$O(E)$ では，それぞれの役割を担ったいくつかの部分群が知られている．ここでは，ホワイトノイズのパラメーター空間 $R^d$ の変換によって得られる $E$ の回転を考え，それらから作られる，いくつかの1径数部分群に着目しよう．それらを列挙すると

i) Shifts $\{S_t^j\}$, $j=1,2,\cdots,d$.

$$(S_t^j\xi)(u) = \xi(u-te_j), \qquad t\in R^1.$$

ただし，$e_1,\cdots,e_d$ は $R^d$ の座標ベクトル．

ii) Isotropic dilation $\{\tau_t\}$.

$$(\tau_t\xi)(u) = \xi(e^t u)\,e^{td/2}, \qquad t\in R^1.$$

iii) $R^d$ の回転 $SO(d)$ からひき起される $\xi\in E$ の変換．$\binom{d}{2}$ 個の1径数群から生成される

iv) Special conformal transformations $\{\kappa_t^j\}$, $j=1,2,\cdots,d$.

$$\kappa_t^j = w\,S_t^j\,w,$$

ただし，$w$ は (3.6) で用いた reflection を表す．

上記 i)〜iv) に挙げた全1径数部分群の生成する $O(E)$ の部分群を $C(d)$ とかく．それは $\frac{1}{2}(d+1)(d+2)$ 次元の Lie 群とみなすことができて，

$$(3.8) \qquad C(d) \cong SO(d+1,1)$$

が示される([4]).

また，明らかに$C(d)$の各元を定義する$R^d$の変換の全体を$\tilde{C}(d)$とかくと

$$(3.9) \qquad \tilde{C}(d) \cong C(d).$$

特に $d=2$ のとき，$\tilde{C}(2)$は円の族 $\mathfrak{S}$ を不変にし，かつ transitive に働くことがわかる.

## §4 変分問題

Gauss型確率場の変分について，典型的な2例を紹介する. 詳細は[5]に譲り，ここではアイディアのみの説明にとどめておく.

1) $R^2$をパラメーター空間にもつGauss型確率場 $X(t)$, $t \in R^2$, が与えられたとし，これから

$$(4.1) \qquad X(C) = \int_C F(s)X(s)\,ds, \qquad C \in \mathfrak{S},$$

を定義する. この$X(C)$の変分を問題にしたい. 但し，$C$の変形は$\tilde{C}(2)$のみによるものとする. また$X(s)$はホワイトノイズによる空間 $\mathcal{H}_1$ で実現され，$\mathcal{S}$-変換を通して，古典的な変分法が適用できるものと仮定しておく.

さて，実際に $\delta X(C)$ を計算するにあたっては，(4.1) における $ds$ が $\tilde{\mathcal{C}}(2)$ の元によって，どのように変化するかを見なければならない。

i). Shift と $R^2$ の回転では $ds$ は変化しない。

ii) Isotropic dilation の無限小変換では

$$ds \longrightarrow ds' = (1+dt)\,ds.$$

iii) Special conformal transformation の場合

$\hat{k}_t^1$ の無限小変換で

$$ds \longrightarrow ds' = ds + 4u\left(\frac{du}{ds}\right)^2 dt\, ds$$

$\hat{k}_t^2$ については

$$ds \longrightarrow ds' = ds + 4v\left(\frac{dv}{ds}\right) dt\, ds$$

となる。ただし，$\hat{k}_t^j$ は $k_t^j$ に対応する $R^2$ の変換を表し，$(u,v)$ は $R^2$ の座標を表す。

上記 6 個の無限小変換からくる generators を $\alpha_j$, $j=1,2,\cdots,6$, と書き，対応する $ds$ の変化を $\delta_j(ds)$ で，また $C$ と $C+\delta C$ との差を $\delta_j(s)$ で表せば

<u>定理</u> $X(C)$ の変分 $\delta X(C)$ は

$$(4.2)\qquad \delta X(C) = \sum_{j=1}^{6} dt_j \int_C \left\{ \alpha_j (FX)(s)\, \delta_j(s)\, ds + (FX)(s)\, \delta_j(ds) \right\}$$

で表わされる。

[註] 通常の Gauss 過程 $X(t)$, $t \in R^1$, に対して $dt$ 間の

変分 $\delta X(t)$ を考えるのと同様に，(4.1) による例では，$C$ を変数，あるいはパラメーターと考えて，変分 $\delta X(C)$ の意義が理解される．また $C(2)$ のユニタリ表現を $L^2(R^2)$ で考えるとき，簡単な計算で Casimir 作用素が定数になることがわかる．これは $X(C)$ に対する標準表現を定義しようとするとき，一つのヒントになるであろう．

2)．Green 関数の方法．

同じく，パラメーター空間は $R^2$ とする．$\mathcal{H}_1$ の元は

$$(4.3) \qquad U(\xi) = \int_{R^2} F(u)\,\xi(u)\,du, \qquad F \in L^2(R^2)$$

なる表現をもつ（(2.2) より）．領域 $G$ をとり，$F$ が $C = \partial G$ に対する Green 関数の場合を考えよう：

$$(4.4) \qquad U(C; z, \xi) = \int_G g(z, u; C)\,\xi(u)\,du$$

2次元パラメーターホワイトノイズを考えたとき，これは $\mathcal{H}_1$ の元

$$(4.5) \qquad X(C; z, x) = \int_G g(z, u; C)\,x(u)\,du, \qquad x \in E^*,$$

の U-functional になっている．Green 関数の性質から

$$\Delta_z U(C; z, \xi) = \xi(z).$$

これは 形式的な計算

$$(4.6) \qquad \Delta_z X(C; z, x) = x(z)$$

を正当化するものである. $C$を固定して, $z \in G$をパラメーターにする確率場として$\{X(C; z, x);\ z \in G\}$をみるとき, 平均値は0, 共分散関数が

$$\Gamma(z, z') = \int_G g(z, u; C)\, g(z', u; C)\, du$$

であるGauss型のものである. それに対しては(4.6)が示すように, ラプラシアンによって, innovation の如き, ホワイトノイズが取り出されることになる.

一方, $z$を固定したとき,

$$(4.7) \qquad \delta X(C) = \int_G \delta g(z, u; C)\, x(u)\, du + \int_C \left\{ \frac{\partial}{\partial n} g(z, s; C) \cdot x(s) + g(z, s, C) \frac{\partial}{\partial n} x(s) \right\} \times \delta n(s)\, ds$$

となるが, $\delta g$は §3, 1), ii) の (3.4) で与えられており, 従って$\delta X(C)$を具体的に与えることができる. 但し, 1)のときも同じことであるが $X(s)$ や $x(s)$ などの法線微分の意を, 確率超過程のように考えようとすれば, さらに深い考察を必要とすることを注意しておきたい.

# [文 献]


[1] P. Lévy, Sur la variation de la distribution de l'électricité sur un conducteur dont la surface se déforme, Bull. Soc. mathématique de France, 46 (1918), 35-68.

[2] _____ , Problèmes concrets d'analyse fonctionnelle, Gauthier-Villars, Paris, 1951.

[3] T. Hida, Brownian motion, (in Japanese) Iwanami, 1975; English edition Springer-Verlag, New York, 1980.

[4] _____ , K.-S. Lee and S.-S. Lee, Conformal invariance of white noise, Nagoya Math. J. 98 (1985), 87-98.

[5] _____ , and Si Si, A variational calculus for Gaussian random fields, to appear.

[6] Si Si, A note on Lévy's Brownian motion, Nagoya Math. J. 108 (1987), 121-130; 同 Part II, Nagoya Math. J. 114 to appear in 1989.